



**XV Wojewódzka Gimnazjada
Matematyczna**

Zadania (I etap)



**MARSZAŁEK WOJEWÓDZTWA
KUJAWSKO-POMORSKIEGO**
Piotr Calbecki

**I Liceum Ogólnokształcące
im. Jana Kasprzowicza
w Inowrocławiu**

Zad. 1 [o ułamkach]

Oblicz:

a) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} : \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$

b) $\frac{2^{19} \cdot 27^3 + 15 \cdot 4^9 \cdot 9^4}{6^9 \cdot 2^{10} + 12^{10}}$

c) $\left[\frac{0,(2)}{0,(24)} - \frac{0,(4)}{0,(48)} + \frac{0,(8)}{0,(96)} \right]^{-2}$

d) $\frac{2017^{2017} + 2 \cdot 2017^{2016} + 2017^{2015}}{2018 \cdot 2017^{2015}}$

Zad. 2 [o mieszkańcach pewnego budynku]

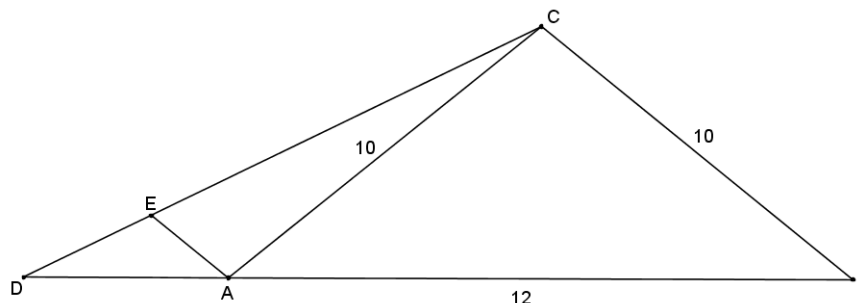
W budynku jest 100 ponumerowanych mieszkań. Każde z nich ma jednego, dwóch lub trzech lokatorów. Łącznie liczba mieszkańców lokali od 1 do 52 jest równa 56, a łączna liczba mieszkańców lokali od 51 do 100 jest równa 150. Ile osób mieszka w tym budynku?

Zad. 3 [o dowolnym trójkącie]

W trójkącie ABC poprowadzono dwusieczne: AD ($D \in BC$), CE ($E \in AB$), kątów CAB i ACB . Dwusieczne te przecięły się w punkcie P . Wykaż, że jeśli na czworokącie $PEBD$ można opisać okrąg to $|\sphericalangle PAC| + |\sphericalangle ACP| = 60^\circ$.

Zad. 4 [o trójkącie równoramiennym]

Dany jest trójkąt równoramienny ABC o bokach: $|AB| = 12$, $|AC| = |BC| = 10$. Na przedłużeniu boku AB zbudowano trójkąt ACD w taki sposób, że punkt D należy do półprostej BA^\rightarrow i $|DB| = 21$. Punkt E należy do odcinka DC . Wykaż, że jeśli $|DE| = 7\frac{2}{7}$, to $AE \parallel BC$.

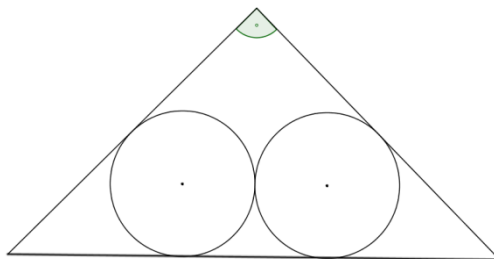


Zad. 5 [o trójkącie prostokątnym]

Trójkąt prostokątny o przyprostokątnych a i b oraz przeciwprostokątnej c obrócono wokół przeciwprostokątnej. Wykaż, że objętość otrzymanej w wyniku obrotu bryły wynosi $\frac{a^2 b^2}{3c} \pi$.

Zad. 6 [o okręgach]

W trójkąt prostokątny równoramienny wpisano dwa przystające okręgi styczne zewnętrznie do siebie i do boków trójkąta, których promień wynosi 2 cm . Oblicz obwód tego trójkąta.

**Zad. 7 [o pewnej nierówności]**

Wykaż, że dla każdego $a \in R$: $\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}} > 2$.

Zad. 8 [o wynagrodzeniu pracowników]

Właściciel fabryki zatrudnia 100 pracowników: brygadzystów, robotników i stażystów (na każdym stanowisku pracuje przynajmniej jedna osoba). Miesięczne wynagrodzenie brygadzisty wynosi 5 000 zł, robotnika 1 000 zł, a stażysty 50 zł. Każdego miesiąca właściciel wypłaca swoim pracownikom łącznie 100 000 zł. Ilu brygadzystów jest zatrudnionych w tej fabryce?

Zad. 9 [o pewnej liczbie]

Wiadomo, że 20% liczby a , będącej sumą 10% odwrotności liczby dodatniej x i $x\%$ liczby 10, jest pierwszym składnikiem tej sumy. Oblicz, ile procent liczby a stanowi liczba x .

Zad. 10 [o siecznych]

Sieczna AB i CD okręgu o środku O przecinają się w punkcie K . Wykaż, że miara kąta α między tymi siecznymi równa się połowie różnicy miar kątów środkowych odpowiadających łukom AD i BC zawartym między tymi siecznymi.

